Risk measureとその周辺 (不確実性の下での意思決定理論とその応用 : 計画数学の展開)

影山, 正幸; 王, キ

数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 22-24

Risk measure とその周辺

名古屋市立大学大学院芸術工学研究科　中国清華大学
Masayuki Kageyama 影山正幸 *
Graduate School of Design and Architecture,
Nagoya City University
Tsinghua University

名古屋市立大学
Qi Wang 王キ
Nagoya City University

概要

長らく, Markowitz [9] の研究以来, 分散がリスクを図る指標であった. しかし, 1990 年代に入り, 裾の思い分布に対しては, 分散だけでは不十分である事が指摘されるようになり, リスク測度に関する研究が Artzner [1] らにより開始され, 多くの研究がこれまでなされてきた [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13]. 本稿では [10] に従って, Distortion Risk Functional を紹介する.

1 Risk measure の定義

定義 1.1 (Artzner et al.[1]) 確率変数 $Y_1, Y_2 \in L^1$ に対して, $\rho : L^1 \to \overline{\mathbb{R}}$ が次の 4 つの性質を満たすとき, ρ は coherent 性を満たすという.

1. (Monotonicity) $\rho(Y_1) \leq \rho(Y_2)$ whenever $Y_1 \geq Y_2$ a.s.,
2. (Translation Equivariance) $\rho(Y + c) = \rho(Y) - c$, if $c \in \mathbb{R}$
3. (Positive homogeneity) $\rho(\lambda Y) = \lambda\rho(Y)$ if $\lambda > 0$,
4. (Convexity) $\rho((1-\lambda)Y_0 + \lambda Y_1) \leq (1-\lambda)\rho(Y_0) + \lambda\rho(Y_1)$ for $0 \leq \lambda \leq 1$.

これらの公理の必然性については, [1] を参照されたい.

* kageyama@sda.nagoya-cu.ac.jp

定義 1.2 (Artzner et al.[1])

$$\begin{aligned} V@R_\gamma(I) &= G_{-I}^{-1}(\gamma) := \inf\{x \in \mathbb{R} | G_{-I}(x) \geq \gamma\}\ (0 \leq \gamma \leq 1), \\ CV@R_\gamma(I) &:= \frac{1}{1-\gamma}\int_\gamma^1 V@R_p(I)dp\ (0 \leq \gamma \leq 1). \end{aligned} \tag{1}$$

ただし, $G_I(x) := P(I \leq x)(x \in \mathbb{R})$.

定理 1.1 (Artzner et al.[1]) $CV@R_\gamma(I)$ は coherent 性を満たす.

定理 1.2 (Rocafellar et al.[11])

$$CV@R_\gamma(I) = \inf_{b\in\mathbb{R}}\Big\{b + \frac{1}{1-\gamma}E[[-I-b]^+]\Big\}. \tag{2}$$

ただし, $[x]^+ := \max\{x, 0\}$.

定理 1.3 (Phlug and Pichler [10]) すべての $Y \in L^1$ に対して, 写像

$$\gamma \mapsto (1-\gamma)CV@R_\gamma(Y)$$

は concave.

2 Distortion Risk Functional

定義 2.1 (Distortion Risk Functional [10])

$$\mathcal{R}_\sigma(Y) := \int_0^1 \sigma(u)G_{-Y}^{-1}(u)du = \int_0^1 \sigma(u)V@R_u(Y)du.$$

$\sigma : [0,1) \to [0,\infty)$ は非負, 非減少で $\int_0^1 \sigma(u)du = 1$ を満たす関数とする. σ は distortion density と呼ばれる.

$CV@R_\gamma(Y)$ は Distortion Risk Functional になっている. その際の distortion density は

$$\sigma_\gamma(u) = \begin{cases} 0 & \text{if } u < \gamma \\ \frac{1}{1-\gamma} & \text{if } u \geq \gamma. \end{cases}$$

定理 2.1 ([10]) 任意の Distortion Risk Functional は, 次のように $CV@R_\gamma$ で表現できる.

$$\mathcal{R}_\sigma(Y) = \int_0^1 V@R_\gamma(Y)\sigma(\gamma)d\gamma = \int_0^1 CV@R_\gamma(Y)\mu_\sigma(d\gamma).$$

ただし, μ_σ は $[0,1]$ 上の確率測度とする.

定理 2.2 ([10]) $\mathcal{R}_\sigma$ をある一つの distortion risk functional とするとき, 次式が成り立つ.

$$\mathcal{R}_\sigma = \sup\Big\{E(YZ)|E(Z) = 1, CV@R_\gamma(Z) \leq \frac{1}{1-\gamma}\int_\gamma^1 \sigma(u)du \text{ for all } \gamma \in [0,1]\Big\}.$$

定理 2.3（[10]） $CV@R_\gamma(Y)$ は次式のように表現できる.

$$CV@R_\gamma(Y) = \sup\Big\{E(YZ)|E(Z)=1, CV@R_p(Z) \leq \frac{1}{1-\gamma} \text{ for all } p \in [\gamma, 1]\Big\}.$$

参考文献

[1] P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, D. Heath and H. Ku, "Coherent measures of risk", *Math. Finance*, 9, 1999, 203-228.

[2] P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, D. Heath and H. Ku, "Coherent multiperiod risk adjusted values and Bellman's principle", *Annals of Operations Research*, 152, 2007, 5-22.

[3] N. Bäuerle, A. Popp, "Risk-sensitive stopping problems for continuous-time markov chains", to appear in *Stochastics.*

[4] N. Bäuerle, U. Rieder, "Partially observable risk-sensitive Markov Decision Processes", *Mathematics of Operations Research*, 42 (4), 2017, 1180-1196.

[5] H. Föllmer and I. Penner, "Convex Measures of Risk and Trading Constraints", *Finance and Stochastics*, Vol. 6, No. 4, 2002, 429-447.

[6] H. Föllmer and I. Penner, "Convex Risk Measure and the Dynamics of Their Penalty Functions", *Statistics & Decision*, Vol. 24, 2006, 61-96.

[7] A. Inoue, "On the Worst Conditional Expectation", *Journal on Applied Mathematics*, Vol. 286, No. 1, 2003, 237-247.

[8] S. Kusuoka, "On law invariant coherent risk measures", *Advances in Mathematical Economics*, Vol.3, Springer, Tokyo, (2001), 83-95.

[9] H. M. Markowitz, Portfolio Selection:Efficient Diversification of Investment, Wiley, New York, 1958.

[10] G. Ch. Phlug, A. Pichler, Multistage Stochastic Optimization, Springer, 2014.

[11] R. T. Rockafellar and S. Uryasev, "Optimization of Conditional Value-at-Risk", *Journal of Risk*, Vol. 2, 3, 2000, 21-42.

[12] R. T. Rockafellar and S. Uryasev, "Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions", *Journal of Banking & Finance*, Vol. 26, No. 7, 2002, 1443-1471.

[13] C. Wu and Y. Lin, "Minimizing Risk Models in Markov Decision Processes with Policies Depending on Target Values", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 231, No. 1, 1999, 47-67.